CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE **C A P E S A**

SESSION 2011

Concours : EXTERNE
Section : **MATHEMATIQUES**

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Culture disciplinaire

(Coefficient 2 : - Durée : 5 heures)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet comporte cinq pages.

Objectifs :

On s'intéresse dans ce problème à quelques propriétés des matrices stochastiques et certaines de leurs applications en probabilité .

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Notations et prérequis

Étant donné un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels à n lignes et n colonnes et par $M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des vecteurs colonnes à n lignes.

Dans l'univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$, on note P_A la probabilité conditionnée par l'évènement A et pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega), P_A(B)$ la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé.

Une matrice est dite *positive* si tous ses coefficients sont des nombres réels positifs ou nuls ; elle est dite *strictement positive* si tous ses coefficients sont des nombres réels strictement positifs.

Une matrice colonne $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite *vecteur de probabilité* si V est positif et si $\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si elle est positive et si la somme des coefficients de chacune de ses colonnes est égale à 1, c'est-à-dire : $\forall j \in \{1;...;n\}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

On rappelle que, pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + ... + a_m A^m$, où I_n désigne la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, alors :

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A).$$

On dit que la suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $M_n(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les n^2 suites réelles définies par les coefficients des matrices A_k convergent vers les coefficients respectifs de A .

On rappelle que si les suites de matrices (A_k) et (A'_k) convergent vers A et A' alors les suites $(A_k + A'_k)$ et $(A_k A'_k)$ convergent respectivement vers $A + A'$ et AA'.

Partie 1 : Matrices stochastiques d'ordre 2 .

Soient a et b deux éléments de $[0;1]$.

1. Dans l'univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, on considère la suite de variables de Bernoulli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque X_n est de paramètre p_n, avec $p_n = P(X_n = 1) \in [0;1]$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{c} P(X_0 = 1) = p_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = a \text{ et } P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1 - b \end{array} \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n = 1 - p_n$.

   a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_{n+1} en fonction de p_n et q_n.

   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = (a - b)p_n + b$.

c. Que peut-on dire de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $a-b=0$?

d. Démontrer que si $a-b=1$, alors la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

e. On s'intéresse maintenant aux cas où $a-b\neq 1$ et $a-b\neq 0$.

(i) Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}, p_n=(p_0-p)(a-b)^n+p$, où $p=\dfrac{b}{1-a+b}$.

(ii) Dans le cas où $a-b=-1$, étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de p_0.

(iii) Dans les cas où $a-b\neq -1$, montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite indépendante de p_0.

2. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $Y_n=\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}, Y_{n+1}=AY_n$ puis montrer que A est stochastique. Justifier que toute matrice stochastique de $M_2(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme de A.

b. Que peut-on dire de A si $a-b=1$? ?

c. Démontrer que $P_c=(X-1)(X+b-a)$ est le polynôme caractéristique de A.

d. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, exprimer en fonction de a et b, lorsque $a-b\neq 1$, le reste de la division euclidienne de X^n par P_c .

e. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, en déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{(a-1)(a-b)^n-b}{a-b-1} & b\dfrac{(a-b)^n-1}{a-b-1} \\ (1-a)\dfrac{(a-b)^n-1}{a-b-1} & \dfrac{(a-1)-b(a-b)^n}{a-b-1} \end{pmatrix}.$$

f. À quelle condition la suite matricielle (A^n) converge-t-elle ?

3. a. Montrer que A est diagonalisable.

b. Déterminer les sous-espaces vectoriels propres associés aux valeurs propres de A.

c. Dans quels cas existe-t-il un unique vecteur de probabilité invariant par A ?

4. Application : Un commerçant dispose d'un stock de plantes à fleurs rose ou blanche veinées de rose. Chacune des plantes fleurit une fois par an.

Pour tout entier naturel n :

-si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$, elle donnera une fleur rose avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$.

-si l'année n, la plante a donné une fleur blanche veinée de rose, alors l'année $n+1$, elle donnera une fleur blanche veinée de rose avec une probabilité de $\dfrac{6}{7}$.

Les plantes à fleurs blanches veinées de rose étant plus esthétiques, sont vendues beaucoup plus cher.

Un premier client achète 90 plantes à fleurs blanches veinées de rose et 10 à fleurs rose.

Un deuxième client achète 10 plantes à fleurs blanche veinées de rose et 90 à fleurs rose.

On appelle u_n (respectivement v_n) la probabilité que le premier client (respectivement le deuxième client) obtienne une plante à fleurs blanches veinées de rose en prenant au hasard une des plantes de son stock l'année n.

a. Préciser u_0 et v_0, exprimer pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n$ et v_n en fonction de n puis calculer u_5 et v_5.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$. Commenter les résultats obtenus.

c. Quelle proportion de plantes à fleurs blanches veinées de rose un client devrait-il acheter afin que la probabilité d'obtenir une plante à fleurs blanches veinées de rose soit égale à cette même proportion à chaque fleurissement ?

Partie 2 : Combinaisons avec répétition, matrices stochastiques à coefficients rationnels .

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et E un ensemble de cardinal n.

On rappelle que $\binom{n}{p}$ désigne le nombre de combinaisons de p éléments de E.

On appelle combinaison avec répétition de p éléments de E toute collection de p éléments de E, non ordonnés, et non nécessairement distincts.

Par exemple,

si $E = \{a, b, c, d\}$,

abc, aac, bdd, ccc sont des combinaisons avec répétition de 3 éléments de E.

aca, aac et caa désignent la même combinaison avec répétition.

On note Γ_n^p le nombre de combinaison avec répétition de p éléments de E.

On remarquera que toute combinaison de p éléments de E est une combinaison avec répétition de p éléments de E et que contrairement aux combinaisons, si $p > n$, on n'a pas $\Gamma_n^p = 0$

1. Calculer, puis exprimer Γ_n^p sous la forme d'un coefficient binomial pour $p = 1$ et 2.

2. Dans toute cette question, on prend n supérieur ou égal à 2. On veut démontrer que $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.

   Soit x un élément donné de E.

   a. Déterminer le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments de E ne contenant pas x.

   b. En déduire que $\Gamma_n^p = \Gamma_n^{p-1} + \Gamma_{n-1}^p$.

   c. En déduire que $\Gamma_n^p = n + \sum_{k=2}^{p} \Gamma_{n-1}^k$.

   d. A l'aide d'une récurrence sur p, démontrer que pour tout entier naturel p,
   $$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-2}{k} = \binom{n+p-1}{p}$$

   e. À l'aide d'une récurrence sur n, démontrer alors le résultat demandé.

3. Application : on veut ranger p boules dans n tiroirs ; combien y-a-t-il de rangements possibles si :

   a. Les boules sont numérotées de 1 à p et on ne peut ranger qu'au plus une boule dans un tiroir donné.

   b. Les boules sont numérotées de 1 à p et on peut ranger autant de boules qu'on le veut dans un tiroir donné.

   c. Les boules sont indifférentiables et on ne peut ranger au plus qu'une boule dans un tiroir donné.

   d. Les boules sont indifférentiables et on peut ranger autant de boules qu'on le veut dans un tiroir donné.

4. On cherche à dénombrer les matrices stochastiques de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont rationnels et ont pour dénominateur p.

   a. Soit F l'ensemble des applications f de E dans $\{0, ..., p\}$ telles que $\sum_{x \in E} f(x) = p$. Montrer qu'il existe une bijection de F dans l'ensemble des combinaisons avec répétition de p éléments de E.

b. En déduire que le nombre de suites de n entiers naturels dont la somme est égale à p est Γ_n^p.

c. En déduire le nombre de matrices stochastiques de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont rationnels et ont pour dénominateur p.

Partie 3 : Matrices stochastiques et probabilités.

A/ Cas général :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, soit r un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $E = \{e_1, ..., e_r\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que $e_1 < ... < e_r$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Z_n est une variable aléatoire définie sur Ω telle que :

$$\begin{cases} Z_n(\Omega) = E \text{ et } \forall j \in \{1, ..., r\}, P(Z_0 = e_j) \neq 0 \\ \forall (i,j) \in \{1, ..., r\}^2, P_{(Z_n = e_j)}(Z_{n+1} = e_i) = p_{i,j} \text{ avec } p_{i,j} > 0 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Pi_n = \begin{pmatrix} P(Z_n = e_1) \\ \vdots \\ P(Z_n = e_r) \end{pmatrix} \in M_{r,1}(\mathbb{R})$ et on appelle matrice de transition de l'état n à l'état $n+1$ la matrice $A = (p_{i,j})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r} \in M_r(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est stochastique.
2. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1, ..., r\}, P(Z_{n+1} = e_j) = \sum_{i=1}^{r} P(Z_n = e_i) \times P_{(Z_n = e_i)}(Z_{n+1} = e_j)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, \Pi_{n+1} = A\Pi_n$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, \Pi_n = A^n \Pi_0$.

B/ Application à un cas particulier :

La plupart des pays, afin de pouvoir emprunter, sont évalués par des agences de notation. On considère pour simplifier que ces agences décernent chaque année pour chaque pays une note entière comprise entre 1 et 3, correspondant au degré de confiance qu'on peut accorder à ce pays quant à ses capacités de remboursement d'un prêt qu'on lui accorderait.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle Z_n la variable aléatoire égale à la note obtenue par un pays donné l'année n, la connaissance de la matrice de transition de l'année n à l'année $n+1$ permet d'anticiper sur la note que pourrait obtenir ce pays connaissant la probabilité initiale qu'a celui-ci d'obtenir chacune des différentes notes.

Supposons que pour un pays donné, on ait, pour tout j fixé dans $\{1, 2, 3\}$, $P_{(Z_n = j)}(Z_{n+1} = j) = \frac{9}{10}$ et si $i \neq j$, les $P_{(Z_n = j)}(Z_{n+1} = i)$ sont proportionnels à $\frac{1}{|i - j|}$.

Démontrer que la matrice de transition de l'année n à l'année $n+1$ est : $A = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 54 & 3 & 2 \\ 4 & 54 & 4 \\ 2 & 3 & 54 \end{pmatrix}$.